Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Dr. Girish Kulkarni

Sommersemester 2022
05.05.2022

Lineare Algebra II
Blatt 5

---

1 | Rein in die Kartoffeln, raus aus den Kartoffeln

Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus jeweils einen größten gemeinsamen Teiler der folgenden Paare:

(a) $17, 54 \in \mathbb{Z}$.

(b) $X^3 + X^2 + X + 1,\ X^3 + 1 \in \mathbb{R}[X]$

(c) $X^3 + 6X + 7,\ X^2 + 3X + 2 \in \mathbb{R}[X]$

(d) $X^6 + X^5 + X + 2,\ 3X^3 + X^2 + 2X + 1 \in \mathbb{F}_5[X]$

2 | Integritätstest

Welche der folgenden kommutativen Ringe sind Integritätsringe?

(a) $K \times K$ für einen Körper K *(mit komponentenweiser Addition und Multiplikation)*

(b) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[X]$

(c) $\mathbb{R}[X^2, X^3] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mid n \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{R} \text{ und } a_1 = 0\}$ *(Unterring von* $\mathbb{R}[X]$*)*

(d) $\mathbb{Z}[\mathbf{i}] = \{a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ *(siehe Lineare Algebra I, Blatt 5, Aufgabe 3)*

(e) $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ *(mit punktweiser Addition und Multiplikation)*

Begründen Sie wie immer Ihre Antwort mit einem Beweis oder einen Gegenbeweis!

3 | Subprime

Sei $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + \mathbf{i}\sqrt{5}b \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, ein Unterring von $\mathbb{C}$.

(a) Berechnen Sie die Einheitengruppe von R: $R^\times = \{\pm 1\}$.

(b) Zeigen Sie, dass das Element $2 \in R$ irreduzibel, aber nicht prim ist.

(c) Ist R ein euklidischer Ring?

Tipp: In R gilt $2 \cdot 3 = (1 + \mathbf{i}\sqrt{5})(1 - \mathbf{i}\sqrt{5})$.

4 | Überlegung

In dieser Aufgabe konstruieren wir einen nicht-trivialen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$.

Sei dazu $V \subset \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(2 \times 2)$ der $\mathbb{R}$-Untervektorraum aus Aufgabe 4 auf Blatt 4, und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das dort definierte Skalarprodukt. Sei $\mathrm{SO}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ die Gruppe aller Isometrien von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit Determinante 1.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SO}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ isomorph zu $\mathrm{SO}(3) = \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3, \text{Standardskalarprodukt})$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in \mathrm{SU}(2)$ die folgende Abbildung eine wohldefinierte Isometrie von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist.

$$\begin{aligned} \varphi_A \colon V &\to V \\ M &\mapsto AM\bar{A}^T \end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist.

$$\begin{aligned} \pi \colon \mathrm{SU}(2) &\to \mathrm{SO}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \\ A &\mapsto \varphi_A \end{aligned}$$

(d) Zeigen Sie, dass π nicht trivial (das heißt hier: nicht konstant) ist und berechnen Sie den Kern von π.

Tatsächlich ist π sogar surjektiv! Es ist aber nicht so einfach, das explizit zu zeigen.